

# Zur Theorie der Absorption monoenergetischer Elektronen in metallischen Folien\*

Von H. MEISTER\*\*

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen  
(Z. Naturforschg. 13 a, 801–808 [1958]; eingegangen am 24. Mai 1958)

Es wird die Selbstabsorption monoenergetischer Elektronen in einer homogen aktivierten Schicht sowie die Absorption in beiderseitig aufgelegten Absorberfolien aus den Streu- und Bremsseigenschaften der Materie näherungsweise berechnet. Wir beschränken uns hierbei auf Elektronenenergien von 0,1 bis 2 MeV und Absorbermaterialien von nicht zu kleiner Kernladungszahl ( $Z > 30$ ). Im Anfangsteil der Elektronenbahnen wird geradlinige Ausbreitung angenommen, die bei der Energie  $E'$  abrupt in die vollständige Diffusion nach der Theorie von BETHE, ROSE und SMITH<sup>1</sup> übergeht.  $E'$  wird dabei so gewählt, daß der aus der Transporttheorie berechnete mittlere quadratische Abstand der Elektronenverteilung im unendlich ausgedehnten Medium durch unsere Näherung möglichst gut approximiert wird.

Die in einer früheren Arbeit<sup>2</sup> gemessenen Absorptionskurven der  $\text{In}^{115\text{m}}$ -Konversionselektronen (Anfangsenergie  $E_0 = 312 \text{ keV}$ ) stehen für die Absorbermaterialien In und Au im Einklang mit unseren Rechnungen; bei Al ( $Z = 13$ ), für das unsere Theorie nicht gilt, treten dagegen größere Abweichungen auf.

Bei der Absolutbestimmung von  $\beta$ -Zerfallsraten mit Hilfe des  $4\pi$ -Zählrohres ist die folgende Fragestellung von erheblicher Bedeutung: innerhalb einer homogen aktivierten Schicht der Dicke  $2d$  mögen Elektronen einer bestimmten Anfangsenergie mit einer isotropen räumlichen Quelldichte entstehen. Bei ihrem Weg durch die Schicht werden die Elektronen gestreut und verlieren Energie durch inelastische Stöße, so daß ein Teil von ihnen in der Schicht zur Ruhe kommt. Gesucht ist die Zahl der auf beiden Seiten der Schicht austretenden Elektronen ohne Rücksicht auf deren Richtung. Wir behandeln dieses Problem für Elektronen einer diskreten Anfangsenergie  $E_0$  (also etwa die Elektronen einer Konversionslinie); bei bekanntem  $\beta$ -Spektrum lassen sich die Ergebnisse dann grundsätzlich auch auf kontinuierliche  $\beta$ -Strahler übertragen.

Die Ausbreitung monoenergetischer Elektronen unter Berücksichtigung ihres Energieverlustes und der Streuung über große Winkel wurde in Arbeiten von LEWIS<sup>3</sup> und SPENCER<sup>4</sup> behandelt, allerdings bei Beschränkung auf ein unendlich ausgedehntes Medium. Wir schließen uns zunächst ihrer Betrachtung an, müssen jedoch bei der Anwendung auf unser Randwertproblem auf eine von BETHE, ROSE und

SMITH<sup>1</sup> angegebene Näherung zurückgreifen. Dem Charakter dieser Näherung entsprechend können wir nur für starke Streuung (d. h. für Kernladungszahlen  $Z > \text{etwa } 30$ ) brauchbare Ergebnisse erwarten.

## 1. Elementarprozesse

Im Energiebereich unter 2 MeV wird der Durchgang von Elektronen durch Materie im wesentlichen bestimmt durch die elastische Streuung am abgeschirmten COULOMB-Feld des Atomkernes und durch die inelastische Streuung an der Elektronenhülle. Der Energieverlust durch Strahlungsbremung kann demgegenüber vernachlässigt werden<sup>5</sup>.

Die elastische Elektronenstreuung am reinen COULOMB-Feld des punktförmigen Kernes wurde von MOTT<sup>6</sup> nach der DIRACschen Theorie behandelt. Die MOTTsche Reihenentwicklung wurde von DOGGETT und SPENCER<sup>7</sup> sowie von SHERMAN<sup>8</sup> numerisch ausgewertet und (bezogen auf den RUTHERFORDschen Streuquerschnitt) in Abhängigkeit von Kernladungszahl  $Z$ , Elektronenenergie  $E$  und Streuwinkel  $\vartheta$  tabuliert:

$$Q(Z, E, \vartheta) = \sigma_{\text{MOTT}} / \sigma_{\text{RUTHERFORD}} .$$

\* Auszug aus der Göttinger Dissertation 1957.

\*\* Jetzt: Reaktorstation Karlsruhe, Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik.

<sup>1</sup> H. A. BETHE, M. E. ROSE u. L. P. SMITH, Proc. Amer. Phil. Soc. **78**, 573 [1938].

<sup>2</sup> H. MEISTER, Z. Naturforschg. **13 a**, 722 [1958].

<sup>3</sup> H. W. LEWIS, Phys. Rev. **78**, 526 [1950].

<sup>4</sup> L. V. SPENCER, Phys. Rev. **98**, 1597 [1955].

<sup>5</sup> H. A. BETHE u. W. HEITLER, Proc. Roy. Soc., Lond. A **146**, 83 [1934].

<sup>6</sup> N. F. MOTT, Proc. Roy. Soc., Lond. A **124**, 425 [1929].

<sup>7</sup> J. A. DOGGETT u. L. V. SPENCER, Phys. Rev. **103**, 1597 [1956].

<sup>8</sup> N. SHERMAN, Phys. Rev. **103**, 1601 [1956].



Für unsere Zwecke muß außerdem die Abschirmung des COULOMB-Feldes durch die Elektronenhülle berücksichtigt werden. Man erhält so bei gleichzeitiger Berücksichtigung der Streuung an den Hüllenelektronen ( $p$  = Impuls,  $v$  = Geschwindigkeit des stoßenden Elektrons) als Streuquerschnitt

$$\sigma(\vartheta) d\Omega = \frac{Z(Z+1) e^4}{4 p^2 v^2} Q(Z, E, \vartheta) \frac{d\Omega}{\{\sin^2 \vartheta/2 + \eta\}^2}, \quad (1)$$

wobei der Abschirmparameter  $\eta$  von MOLIERE<sup>9</sup> unter Zugrundelegung des THOMAS-FERMI-Modells berechnet wurde:

$$\left(-\frac{dE}{ds}\right) = \frac{2\pi Z e^4}{m v^2} N_0 \left\{ \ln \frac{m v^2 E}{2 I^2 (1-\beta^2)} - (2\sqrt{1-\beta^2} - 1 + \beta^2) \ln 2 + 1 - \beta^2 + \frac{1}{8} (1 - \sqrt{1-\beta^2})^2 \right\}, \quad \beta = v/c. \quad (3)$$

Das Bremsvermögen  $-dE/ds$  ist hiernach proportional zur Dichte  $ZN_0$  der Atomelektronen im Material und hängt nur logarithmisch von der mittleren Ionisierungsenergie  $I$  des Atoms ab.

Sieht man im folgenden von den statistischen Schwankungen des Energieverlustes ab, so kann man eine eindeutige Korrelation zwischen der Elektronenenergie  $E$  und der vom Elektron insgesamt durchlaufenen Wegstrecke  $s$  aufstellen. Ist  $E_0$  die Anfangsenergie des Elektrons, so erhält man hierfür die Beziehung

$$s = \int_0^{E_0} \frac{dE}{[-(dE/ds)]}, \quad (4)$$

die sich mit Hilfe der Bremsformel Gl. (3) leicht numerisch auswerten läßt. Entsprechend ist die wahre Reichweite  $s_0$  eines Elektrons der Energie  $E_0$  gegeben durch

$$s_0 = \int_E^{E_0} \frac{dE}{[-(dE/ds)]}. \quad (5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} + \cos \vartheta \frac{\partial f}{\partial z} = N_0 \iint \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi' \cdot \sigma[\cos \vartheta_0, E(s)] \{f(z, \vartheta', s) - f(z, \vartheta, s)\} + q(z, \vartheta) \delta(s) \quad (6)$$

( $N_0$  = Zahl der streuenden Atome pro  $\text{cm}^3$ )  
 $\sigma[\cos \vartheta_0, E(s)]$  = differentieller Streuquerschnitt des Atoms,

$\cos \vartheta_0 = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi')$ ,

$\delta(s)$  = DIRACsche  $\delta$ -Funktion).

Die beiden Glieder auf der linken Seite beschreiben Abbremsung und Ausfluß der Elektronen aus dem Volumenelement, das Integral die Streuung von

$$\eta = \frac{1}{4} \left( \frac{Z^{1/3}}{0,885 \cdot 137} \right)^2 \frac{(m c^2)^2}{E(E+2 m c^2)} \cdot \left\{ 1,13 + 3,76 \left( \frac{Z}{137} \right)^2 \frac{(E+m c^2)^2}{E(E+2 m c^2)} \right\}. \quad (2)$$

Dagegen vernachlässigen wir die bei kleinen Energien auftretenden Elektroneninterferenzen am Metallgitter sowie den bereits bei einigen MeV bemerkbaren Einfluß der endlichen Ausdehnung des Kernes.

Der mittlere Energieverlust  $-dE$  eines Elektrons infolge von Anregung und Ionisation der auf der Weglänge  $ds$  durchlaufenen Materie ist nach BETHE und BLOCH<sup>10</sup> gegeben durch

## 2. Die Transportgleichung

Es soll jetzt die Ausbreitung von Elektronen der Anfangsenergie  $E_0$  in einem Medium mit bekannten Streu- und Bremsseigenschaften untersucht werden, wobei wir uns mit Rücksicht auf unser Problem auf eine ebene Geometrie beschränken können. Statt der Elektronenenergie  $E$  führen wir hierbei die nach Abbremsung von  $E_0$  auf  $E$  gemäß Gl. (4) zurückgelegte Wegstrecke  $s$  ein.

Die Elektronenverteilung am Orte  $z$  mit dem Richtungswinkel  $\vartheta$  gegen die positive  $z$ -Achse und der der Wegstrecke  $s$  entsprechenden Energie  $E(s)$  beschreiben wir durch die differentielle Bremsdichte  $f(z, \vartheta, s)$ , d. i. die Zahl der Elektronen, die pro Volumen- und Raumwinkeleinheit sekundlich die Wegstrecke  $s$  überschreiten [bzw. die Energie  $E(s)$  unterschreiten].  $f(z, \vartheta, s)$  genügt dann der folgenden Integrodifferentialgleichung<sup>3, 4</sup>:

Elektronen der Richtung  $(\vartheta', \varphi')$  in die betrachtete Richtung  $(\vartheta, \varphi)$  und umgekehrt.  $q(z, \vartheta)$  ist die auf die Raumwinkeleinheit bezogene Quelldichte der Elektronen mit der Anfangsenergie  $E_0$ .

Entwickelt man  $f(z, \vartheta, s)$  und  $q(z, \vartheta)$  nach Kugelfunktionen

$$f(z, \vartheta, s) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l(z, s) P_l(\cos \vartheta), \quad (7)$$

$$q(z, \vartheta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) q_l(z) P_l(\cos \vartheta), \quad (8)$$

<sup>9</sup> G. MOLIERE, Z. Naturforsch. **2a**, 133 [1947].

<sup>10</sup> H. A. BETHE, Handbuch der Physik, Bd. **24**, Springer-Verlag, Berlin 1933, S. 273.

so erhält man unter Berücksichtigung des Additionstheorems der Kugelfunktionen sowie der Rekursionsformel

$$\cos \vartheta P_l(\cos \vartheta) = \frac{l+1}{2l+1} P_{l+1}(\cos \vartheta) + \frac{l}{2l+1} P_{l-1}(\cos \vartheta)$$

ein gekoppeltes System partieller Differentialgleichungen für die Entwicklungskoeffizienten  $f_l(z, s)$ :

$$\frac{\partial f_l}{\partial s} + \frac{l+1}{2l+1} \frac{\partial f_{l+1}}{\partial z} + \frac{l}{2l+1} \frac{\partial f_{l-1}}{\partial z} = -\kappa_l(s) f_l(z, s) + q_l(z) \delta(s) \quad (l=0, 1, \dots). \quad (9)$$

Die Größen  $\kappa_l(s)$  können hierbei für ein gegebenes Medium aus dem Streuquerschnitt berechnet werden:

$$\kappa_l(s) = 2\pi N_0 \int_0^\pi \sigma[\cos \vartheta, E(s)] \cdot [1 - P_l(\cos \vartheta)] \sin \vartheta d\vartheta \quad (l=0, 1, \dots). \quad (10)$$

Die direkte Integration des Gleichungssystems (9) bereitet beträchtliche Schwierigkeiten, doch lassen sich aus Gl. (9) nach LEWIS<sup>3</sup> und SPENCER<sup>4</sup> die räumlichen Momente der Elektronenverteilung

$$F_l^n(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_l(z, s) z^n dz \quad (11)$$

für ein *unendlich ausgedehntes* Medium rekursiv berechnen:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial s} + \kappa_l(s) \right\} F_l^n - n \left[ \frac{l+1}{2l+1} F_{l+1}^{n-1} + \frac{l}{2l+1} F_{l-1}^{n-1} \right] + \int_{-\infty}^{+\infty} q_l(z) z^n dz \cdot \delta(s) = 0 \quad (l, n=0, 1, 2, \dots). \quad (12)$$

Beispielsweise für eine isotrope Flächenquelle bei  $z=0$  ist das zweite Moment der Verteilung, nämlich der mittlere quadratische Abstand der Elektronen nach der Weglänge  $s$ , gemäß Gl. (12) gegeben durch

$$\bar{z}^2 = F_0^2(s) = \frac{2}{3} \int_0^s k_1(s') ds' \int_0^{s'} \frac{ds''}{k_1(s'')}, \quad (13)$$

$$k_1(s) = \exp \left( - \int_0^s \kappa_1(s') ds' \right).$$

In analoger Weise lassen sich sämtliche  $F_l^n$  durch die  $\kappa_l(s)$  ausdrücken; hierdurch ist dann prinzipiell auch die Verteilung  $f(z, \vartheta, s)$  festgelegt.

Im Falle des *berandeten* Mediums führt dieses Integrationsverfahren nicht zum Ziel; es muß dann auf das Gleichungssystem (9) zurückgegriffen wer-

den. Eine geschlossene Lösung von Gl. (9) kann allerdings nur dann erhalten werden, wenn die Entwicklung Gl. (7) so rasch konvergiert, daß sie nach den beiden ersten Gliedern abgebrochen werden kann. Man wird von vornherein erwarten, daß dies nur für große  $s$  möglich ist, nachdem sich anfängliche starke Anisotropien von  $f(z, \vartheta, s)$  durch Diffusion weitgehend ausgeglichen haben.

### 3. Die Näherung von Bethe, Rose und Smith

Für hinreichend große  $s$  soll die Winkelverteilung  $f(z, \vartheta, s)$  der Elektronen im Sinne der elementaren Diffusionstheorie näherungsweise durch die beiden ersten Glieder der Entwicklung Gl. (7) beschrieben werden:

$$f(z, \vartheta, s) = \frac{1}{4\pi} [f_0(z, s) + 3 f_1(z, s) \cos \vartheta]. \quad (14)$$

$$f_0(z, s) = 2\pi \int_0^\pi f(z, \vartheta, s) \sin \vartheta d\vartheta \quad (15)$$

ist die Bremsdichte der Elektronen,

$$f_1(z, s) = 2\pi \int_0^\pi f(z, \vartheta, s) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \quad (16)$$

der ihr zugeordnete Strom. Durch Integration über den Energieparameter  $s$  erhält man hieraus den gesamten Fluß  $\Phi$  bzw. den Gesamtstrom  $j$  im Energiebereich  $E(s_2) < E(s) < E(s_1)$ :

$$\Phi(z) = \int_{s_1}^{s_2} f_0(z, s) ds, \quad (17)$$

$$j(z) = \int_{s_1}^{s_2} f_1(z, s) ds. \quad (18)$$

Unter den Voraussetzungen

$$|f_2| \ll f_0 \quad \text{ sowie } \quad \left| \frac{\partial f_1}{\partial s} \right| \ll \kappa_1 |f_1| \quad (19)$$

ergibt sich aus den beiden ersten Gleichungen ( $l=0, 1$ ) des Systems (9) zur Bestimmung von  $f_0(z, s)$  die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial f_0}{\partial s} = \frac{\lambda(s)}{3} \frac{\partial^2 f_0}{\partial z^2}, \quad (20)$$

in der die Transportweglänge  $\lambda(s) = 1/\kappa_1(s)$  noch vom Energieparameter  $s$  abhängt. Speziell findet man als Beziehung zwischen  $f_1$  und  $f_0$

$$f_1(z, s) = - \frac{\lambda(s)}{3} \frac{\partial f_0(z, s)}{\partial z}. \quad (21)$$

Mit der Substitution

$$\tau(s', s) = \int_{s'}^s \frac{\lambda(s)}{3} ds \quad (22)$$

$$\text{bzw. } \tau(E', E) = \int_E^{E'} \frac{\lambda(E)}{3[-(dE/ds)]} dE$$

läßt sich die Differentialgleichung (20) auf die Form der Wärmeleitungsgleichung bringen

$$\frac{\partial f_0}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 f_0}{\partial z^2} \quad (23)$$

und nach den Standardmethoden integrieren. Diese von BETHE, ROSE und SMITH<sup>1</sup> aufgestellte Näherung entspricht völlig der FERMISCHEN AGE-Theorie der Neutronenbremsung mit dem einzigen Unterschied, daß hier die Größe  $\tau$  wegen der kontinuierlichen Elektronenbremsung in anderer Weise gebildet wird.

Es soll nun der Gültigkeitsbereich dieser Näherung untersucht werden. Zur näheren Erläuterung der Forderungen Gl. (19) betrachten wir die Lösung von Gl. (23) im unendlich ausgedehnten Medium (Einheitsquelle bei  $z=0$ ):

$$f(z, s) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau(0, s)}} e^{-z^2/4\tau(0, s)}. \quad (24)$$

Man findet dann unter Berücksichtigung von Gl. (9), daß die folgenden notwendigen Bedingungen erfüllt sein müssen:

$$\tau \gg \lambda^2; \quad |z| \ll \tau/\lambda; \quad \left| \frac{d\lambda}{ds} \right| \ll 1. \quad (25)$$

1. Die Bedingung  $\tau \gg \lambda^2$  ist nach Gl. (22) gleichbedeutend mit  $s \gg \lambda$ ; sie beschränkt die Gültigkeit der Näherung auf hinreichend große  $s$ , bei denen die höheren Entwicklungskoeffizienten  $f_l$  ( $l \gg 2$ ) in Gl. (7) bereits stark abgeklungen sind.

2. Wegen  $|z| \ll \tau/\lambda$  darf  $z^2$  nicht groß gegen  $z^2 = 2\tau$  sein, d. h. das Auslaufen der Elektronenverteilung für große  $z$  wird nicht richtig wiedergegeben.

3. Wegen  $|d\lambda/ds| \ll 1$  darf sich die Streuweglänge nicht zu stark mit zunehmendem  $s$  ändern. Wie wir später zeigen werden, wird hierdurch die Gültigkeit der Näherung auf Substanzen mit nicht zu kleiner Kernladungszahl ( $Z > 30$ ) beschränkt.

#### 4. Elektronenabsorption in Folien

Um zu einer Lösung des eingangs formulierten Problems zu kommen, haben wir bei vorgegebener Quellverteilung  $q_0(z)$  den beiderseits aus der Folie

(Schichtdicke  $2d$ ) austretenden Elektronenstrom zu berechnen. Hierzu werden wir das folgende Näherungsverfahren benutzen:

1. Im Anfangsteil ( $s < s'$ ) der Elektronenbahnen, nämlich im Bereich der Vielfachstreuung über kleine Winkel, vernachlässigen wir die Streuung überhaupt, rechnen also mit geradliniger Ausbreitung.

2. Für  $s' < s < s_0$  rechnen wir nach der Diffusionstheorie von BETHE, ROSE und SMITH, vernachlässigen also die höheren Glieder  $f_l$  in der Entwicklung Gl. (7).

Der allmähliche Übergang von der Vielfachstreuung in die vollständige Diffusion wird dabei ersetzt durch einen plötzlichen Übergang bei  $s = s'$ , entsprechend einer Grenzenergie  $E' = E(s')$ . Diese muß dann noch in geeigneter Weise festgelegt werden (vgl. Abschnitt 6).

Für die geradlinige Elektronenausbreitung im Bereich  $0 < s < s'$  erhält man aus der Transportgleichung (6) bei Vernachlässigung des Streuintegrals

$$\frac{\partial f}{\partial s} + \cos \vartheta \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = q(z, \vartheta) \delta(s) \quad (0 < s < s'). \quad (26)$$

Mit der isotropen Quelldichte  $q(z, \vartheta) = q_0(z)/4\pi$  findet man als Lösung von Gl. (26)

$$f(z, \vartheta, s) = \frac{1}{4\pi} q_0(z - s \cos \vartheta) \quad (0 < s < s'). \quad (27)$$

sowie den bei  $z = d$  im Bereich  $0 < s < s'$  austretenden Elektronenstrom

$$j_1(d) = 2\pi \int_0^{s'} ds \int_0^{\pi/2} f(z, \vartheta, s) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta. \quad (28)$$

Für  $s = s'$  soll die geradlinige Ausbreitung in die vollständige Diffusion übergehen. Wir haben daher die Diffusionsgleichung (20) im Bereich  $s' < s < s_0$  mit der Anfangsbedingung

$$f_0(z, s) = f_0(z, s') \equiv 2\pi \int_0^{\pi} f(z, \vartheta, s') \sin \vartheta d\vartheta \quad \text{für } s = s' \quad (29)$$

zu integrieren:

$$\frac{\partial f_0}{\partial s} = \frac{\lambda(s)}{3} \frac{\partial^2 f_0}{\partial z^2} + f_0(z, s') \cdot \delta(s - s') \quad (s' < s < s_0). \quad (30)$$

Aus deren Lösung  $f_0(z, s)$  erhält man dann nach Gl. (18) den im Bereich  $s' < s < s_0$  bei  $z = d$  austretenden Elektronenstrom

$$j_2(d) = \int_{s'}^{s_0} f_1(d, s) ds = - \int_{s'}^{s_0} \frac{\lambda(s)}{3} \left( \frac{\partial f_0}{\partial z} \right)_{z=d} ds \quad (31)$$

und somit den Gesamtstrom

$$j(d) = j_1(d) + j_2(d). \quad (32)$$

Bei der Lösung der Diffusionsgleichung (30) ist für  $z = \pm d$  eine Randbedingung zu berücksichtigen, die besagt, daß dort keine Elektronen von außen in die Folie eintreten:

$$f(z, \vartheta, s) = 0 \quad \text{für} \quad \begin{cases} z = +d, \cos \vartheta < 0 \\ z = -d, \cos \vartheta > 0 \end{cases} \quad (s' < s < s_0). \quad (33)$$

Im Rahmen der elementaren Theorie ( $f_l = 0$  für  $l \geq 2$ ) bedeutet dies, daß der bei  $z = d$  von außen eintretende Elektronenstrom

$$2\pi \int_{\pi/2}^{\pi} f(d, \vartheta, s) \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta = \frac{f_0(d, s)}{4} - \frac{f_1(d, s)}{2} \quad (s' < s < s_0)$$

gleich Null sein soll (eine analoge Bedingung gilt für  $z = -d$ ), d. h. nach Gl. (21) muß gelten

$$f_0(\pm d, s) \pm \frac{2}{3} \lambda(s) \left( \frac{\partial f_0}{\partial z} \right)_{z=\pm d} = 0. \quad (33a)$$

Eine genauere Rechnung nach der Transporttheorie<sup>11</sup> ergibt dagegen bei isotroper Streuung für den asymptotischen Verlauf von  $f_0$  statt Gl. (33a) die Bedingung

$$f_0(\pm d, s) \pm 0,71 \lambda(s) \left( \frac{\partial f_0}{\partial z} \right)_{z=\pm d} = 0, \quad (33b)$$

die auch bei anisotroper Streuung näherungsweise gültig ist. Danach geht der linear extrapolierte Verlauf von  $f_0$  im Abstand  $0,71 \lambda(s)$  von der Oberfläche durch Null (für die numerische Auswertung ist der Unterschied zwischen (33a) und (33b) im allgemeinen ohne Bedeutung).

Zur Vereinfachung der folgenden Rechnungen führen wir statt  $0,71 \lambda(s)$  eine mittlere Extrapolationslänge  $0,71 \bar{\lambda}$  ein, die durch

$$\bar{\lambda} = \int_{s'}^{s_0} f_1(d, s) \lambda(s) \, ds / \int_{s'}^{s_0} f_1(d, s) \, ds \quad (34)$$

definiert wird. Dadurch erhalten wir statt Gl. (33b) eine von  $s$  unabhängige Randbedingung

$$f_0(\pm d, s) \pm 0,71 \bar{\lambda} \left( \frac{\partial f_0}{\partial z} \right)_{z=\pm d} = 0 \quad (s' < s < s_0). \quad (35)$$

Bei Beschränkung auf eine symmetrische Quellverteilung [ $q_0(-z) = q_0(z)$ ] lösen wir die Diffusionsgleichung (30) durch den anharmonischen FOURIER-Ansatz

$$f_0(z, s) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos \left( \alpha_m \pi \frac{z}{d} \right) e^{-\frac{\alpha_m^2 \pi^2}{d^2} \tau(s', s)} \quad (s' < s < s_0). \quad (36)$$

Um hiermit die Randbedingung (35) zu erfüllen, muß der Entwicklungsparameter  $\alpha_m$  eine Wurzel der transzendenten Gleichung

$$\alpha_m \pi \operatorname{tg}(\alpha_m \pi) = d/0,71 \bar{\lambda} \quad (37)$$

sein [für große  $m$  gilt asymptotisch  $\alpha_m \approx m$ , im Grenzfall  $\bar{\lambda} = 0$  ist dagegen  $\alpha_m = (2m+1)/2$  für alle  $m$ ]. Wegen Gl. (37) gilt die Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-d}^{+d} \cos \left( \alpha_k \pi \frac{z}{d} \right) \cos \left( \alpha_l \pi \frac{z}{d} \right) dz = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq l \\ d \left( 1 + \frac{\sin 2\pi \alpha_k}{2\pi \alpha_k} \right) & \text{für } k = l, \end{cases}$$

so daß man für die Entwicklungskoeffizienten  $A_m$  erhält:

$$A_m = \frac{1}{d[1 + (\sin 2\pi \alpha_m / 2\pi \alpha_m)]} \cdot \int_{-d}^{+d} f_0(z, s') \cos \left( \alpha_m \pi \frac{z}{d} \right) dz. \quad (38)$$

Aus der Lösung  $f_0(z, s)$  berechnen wir nun

$$\left( -\frac{\partial f_0}{\partial z} \right)_{z=d} = \frac{1}{d} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \alpha_m \pi \sin(\alpha_m \pi) \cdot e^{-\frac{\alpha_m^2 \pi^2}{d^2} \tau(s', s)} \quad (39)$$

und finden nach Integration über  $s$  unter Beachtung von Gl. (36) den bei  $z = d$  austretenden Elektronenstrom

$$j_2(d) = \frac{1}{2} \int_{-d}^{+d} f_0(z, s') \, dz \quad (40)$$

$$-d \sum_{m=0}^{\infty} A_m \frac{\sin \alpha_m \pi}{\alpha_m \pi} e^{-\frac{\alpha_m^2 \pi^2}{d^2} \tau(s', s_0)}.$$

Dieses Ergebnis soll im folgenden für zwei spezielle Quellverteilungen ausgewertet werden.

<sup>11</sup> G. PLACZEK u. W. SEIDEL, Phys. Rev. 72, 550 [1947].

a) Ebene Flächenquelle bei  $z = 0$

Mit der Quelldichte  $q_0(z) = Q \cdot \delta(z)$  ergibt sich nach Gl. (27)

$$f(z, \vartheta, s) = \frac{Q}{4\pi} \delta(z - s \cos \vartheta).$$

$$j_1(d) = \begin{cases} \frac{Q}{2} \left(1 - \frac{d}{s'}\right) & \text{für } d < s', \\ 0 & \text{für } d > s' \end{cases} \quad (41)$$

sowie nach Gl. (27) die Bremsdichte bei  $s = s'$

Hieraus erhält man nach Gl. (28) den Elektronenstrom im Bereich  $0 < s < s'$

$$f_0(z, s') = \begin{cases} Q/2 s' & \text{für } -s' < z < s', \\ 0 & \text{für } |z| > s'. \end{cases} \quad (42)$$

Damit ist der Entwicklungskoeffizient  $A_m$  entsprechend Gl. (38) festgelegt:

$$A_m = \frac{Q}{s' \left[ 1 + \frac{\sin 2 \alpha_m \pi}{2 \alpha_m \pi} \right]} \cdot \begin{cases} \frac{\sin \alpha_m \pi}{\alpha_m \pi} & \text{für } d < s', \\ \frac{\sin \alpha_m \pi s'/d}{\alpha_m \pi} & \text{für } d > s', \end{cases} \quad (43)$$

und man erhält den Strom im Bereich  $s' < s < s_0$ :

$$j_2(d) = \begin{cases} \frac{Q}{2} \frac{d}{s'} - d \sum_{m=0}^{\infty} A_m \frac{\sin \alpha_m \pi}{\alpha_m \pi} e^{-\frac{\alpha_m^2 \pi^2}{d^2} \tau(s', s_0)} & (d < s'), \\ \frac{Q}{2} - d \sum_{m=0}^{\infty} A_m \frac{\sin \alpha_m \pi}{\alpha_m \pi} e^{-\frac{\alpha_m^2 \pi^2}{d^2} \tau(s', s_0)} & (d > s'). \end{cases} \quad (44)$$

Beziehen wir den auf beiden Seiten der Folie austretenden Gesamtstrom  $2j = 2(j_1 + j_2)$  auf die Flächenquellendichte  $Q$ , so erhalten wir die Transmission der Elektronen in beiderseitig aufgelegten Absorbern der Dicke  $d$

$$a_e(d) = \frac{2j}{Q} = 1 - 2 \frac{d}{s'} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\alpha_m^2 \pi^2}{d^2} \tau(s', s_0)}}{1 + \frac{\sin 2 \alpha_m \pi}{2 \alpha_m \pi}} \cdot \begin{cases} \left( \frac{\sin \alpha_m \pi}{\alpha_m \pi} \right)^2 & (d < s'), \\ \frac{\sin \alpha_m \pi}{\alpha_m \pi} \frac{\sin \alpha_m \pi s'/d}{\alpha_m \pi} & (d > s'). \end{cases} \quad (45)$$

Vernachlässigen wir hierbei die Randkorrektur, d. h. setzen wir  $\bar{\lambda} = 0$ , so ergibt sich mit  $\alpha_m = (2m+1)/2$

$$a_e(d) = \begin{cases} 1 - \frac{8}{\pi^2} \frac{d}{s'} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} e^{-\frac{(2m+1)^2 \pi^2}{4d^2} \tau(s', s_0)} & (d < s'), \\ 1 - \frac{8}{\pi^2} \frac{d}{s'} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^2} \sin \frac{(2m+1) \pi s'}{2d} e^{-\frac{(2m+1)^2 \pi^2}{4d^2} \tau(s', s_0)} & (d > s'). \end{cases} \quad (45 a)$$

b) Homogen aktivierte Folie

Dieselbe Rechnung wird für eine homogen aktivierte Folie der Dicke  $2d$  durchgeführt. Als Quelldichte hat man hier

$$q_0(z) = \begin{cases} q/4\pi & (|z| < d), \\ 0 & (|z| > d) \end{cases} \quad \text{anzusetzen und erhält} \quad f(z, \vartheta, s) = \begin{cases} q/4\pi & (|z - s \cos \vartheta| < d), \\ 0 & (|z - s \cos \vartheta| > d). \end{cases}$$

Hieraus findet man in derselben Weise wie unter a)

$$j_1(d) = \begin{cases} q d (1 - d/s') & (d < s'/2), \\ q s'/4 & (d > s'/2), \end{cases} \quad (46)$$

$$f_0(z, s') = q d/s' \quad \text{für} \quad (0 < d < s'/2),$$

$$f_0(z, s') = \begin{cases} \frac{q}{2} \frac{s' + d + z}{s'} & (-d < z < -|\gamma|) \\ q d/s' \text{ bzw. } q & (-|\gamma| < z < +|\gamma|) \\ \frac{q}{2} \frac{s' + d - z}{s'} & (+|\gamma| < z < +d) \end{cases} \quad \begin{matrix} (s'/2 < d < s'), \\ \text{bzw. } (s' < d < \infty), \end{matrix} \quad (47)$$

$$A_m = \frac{q}{1 + \frac{\sin 2 \alpha_m \pi}{2 \alpha_m \pi}} \cdot \begin{cases} 2 \frac{d}{s'} \frac{\sin \alpha_m \pi}{\alpha_m \pi} & (d < s'/2), \\ \left( \frac{\sin \alpha_m \pi}{\alpha_m \pi} + \frac{d}{s'} \frac{\cos \alpha_m \pi (1 - s'/d) - \cos \alpha_m \pi}{\alpha_m^2 \pi^2} \right) & (d > s'/2). \end{cases} \quad \text{wobei } \gamma = s' - d; \quad (48)$$

Wir beziehen  $2j(d)$  auf die gesamte Quellstärke  $2qd$  und erhalten als Selbstabsorptionsfaktor  $s_e(2d) = j(d)/qd$  einer homogenen aktivierten Folie der Dicke  $2d$

$$s_e(2d) = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\alpha_m^2 \pi^2}{d^2} \tau(s', s_0)}}{1 + \frac{\sin 2 \alpha_m \pi}{2 \alpha_m \pi}} \cdot \begin{cases} 2 \frac{d}{s'} \left( \frac{\sin \alpha_m \pi}{\alpha_m \pi} \right)^2 & (d < s'/2), \\ \frac{\sin \alpha_m \pi}{\alpha_m \pi} \left( \frac{\sin \alpha_m \pi}{\alpha_m \pi} + \frac{d}{s'} \frac{\cos \alpha_m \pi (1 - s'/d) - \cos \alpha_m \pi}{\alpha_m^2 \pi^2} \right) & (d > s'/2). \end{cases} \quad (49)$$

Unter Vernachlässigung der Randkorrektur ( $\bar{\lambda} = 0$ ) ergibt sich entsprechend

$$s_e(2d) = \begin{cases} 1 - \frac{8}{\pi^2} \frac{d}{s'} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} e^{-\frac{(2m+1)^2 \pi^2}{4d^2} \tau(s', s_0)} & (d < s'/2), \\ 1 - \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \left( 1 + \frac{d}{s'} \frac{2}{(2m+1)\pi} \sin \frac{(2m+1)\pi s'}{2d} \right) e^{-\frac{(2m+1)^2 \pi^2}{4d^2} \tau(s', s_0)} & (d > s'/2). \end{cases} \quad (49a)$$

## 5. Berechnung von $\lambda$ und $\tau_0$

Zur numerischen Auswertung unserer Ergebnisse wurde für die Substanzen Al ( $Z=13$ ), In ( $Z=49$ ) und Au ( $Z=79$ ) die Transportweglänge  $\lambda$  bei verschiedenen Elektronenenergien  $E$  berechnet. Gemäß Gl. (10) erhält man mit dem differentiellen Streuquerschnitt nach Gl. (1)

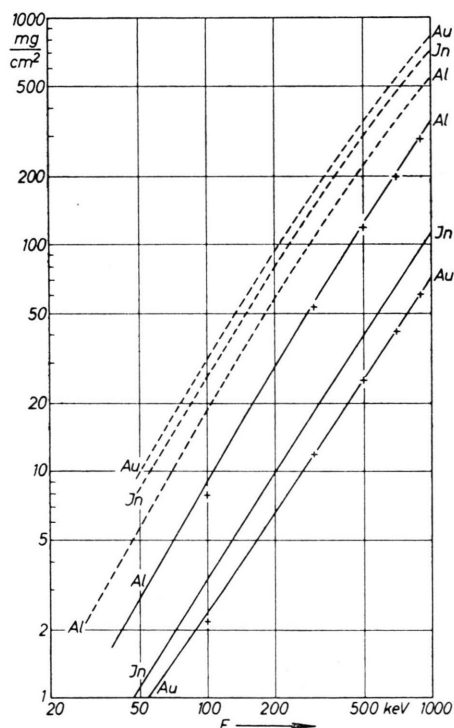
$$\lambda = \left[ 2\pi \frac{Z(Z+1)}{p^2 v^2} N_0 \int_0^\pi Q(Z, E, \vartheta) \frac{1 - \cos \vartheta}{(1 - \cos \vartheta + 2\eta)^2} \sin \vartheta d\vartheta \right]^{-1}. \quad (50)$$

Das Verhältnis  $Q(Z, E, \vartheta) = \sigma_{\text{MOTT}} / \sigma_{\text{RUTHERFORD}}$  wurde hierbei nach numerischen Angaben von DOGGETT und SPENCER<sup>7</sup> eingesetzt, der Abschirmparameter  $\eta$  nach der Näherungsformel Gl. (2) bestimmt. Im Winkelbereich  $0 < \vartheta < 15^\circ$  konnte  $Q(Z, E, \vartheta)$  durch den Ansatz  $Q(Z, E, \vartheta) = 1 + m(Z, E) \sin \vartheta$  approximiert und damit die Integration über  $\vartheta$  in Gl. (50) analytisch durchgeführt werden, im Intervall  $15^\circ < \vartheta < 180^\circ$  wurde das Integral durch Planimetrieren bestimmt.

Wegen der Interpolation zwischen den im Abstand von  $15^\circ$  angegebenen  $Q$ -Werten beträgt die Ungenauigkeit des Integrals etwa 2%; in derselben Größenordnung liegt die Unsicherheit wegen des nur näherungsweise bekannten Abschirmparameters  $\eta$ .

In Tab. 1 ist die erhaltene Transportweglänge  $\lambda$  in der Einheit  $\text{mg}/\text{cm}^2$  angegeben und in Abb. 1 in Abhängigkeit von der Energie aufgetragen. Zum Vergleich wurden Werte eingezeichnet, die von

Substanz $Z =$	Al 13	In 49	Au 79
0,05 MeV	2,71	1,11	(0,880)
0,1	8,94	3,27	2,35
0,2	28,7	9,75	6,49
0,4	87,2	28,2	18,0
0,7	204	65,7	41,3
1,0	350	112	70,2
2,0	1023	323	203
4,0	3150	993	625

Tab. 1. Transportweglänge  $\lambda$  (in mg/cm<sup>2</sup>).Abb. 1. Transportweglänge  $\lambda$  und wahre Restreichweite  $r$  in Abhängigkeit von der Elektronenenergie  $E$ .

—  $\lambda$  berechnet nach Gl. (50),  
 +  $\lambda$ -Werte von SPENCER<sup>4</sup>,  
 --- Restreichweite  $r$  nach SPENCER<sup>4</sup>.

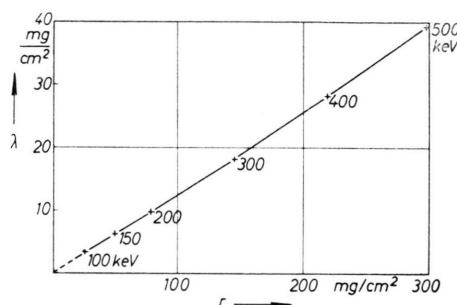
SPENCER<sup>4</sup> aus älteren  $Q$ -Werten für Al und Au berechnet wurden und die recht gut mit den unseren übereinstimmen. Außerdem wurde die der Elektronenenergie  $E$  nach Gln. (4) und (5) entsprechende wahre Restreichweite  $r = s_0 - s$  eingetragen, die von SPENCER<sup>4</sup> aus der Bremsformel Gl. (3) berechnet wurde.

Es soll nun die für die Diffusion maßgebende Größe  $\tau_0 = \tau(0, s_0)$  ermittelt werden. Betrachtet man

$\lambda$  als Funktion von  $r$ , so erhält man nach Gl. (22)

$$\tau_0 = \int_0^{s_0} \frac{\lambda(s_0 - s)}{3} ds = \int_0^{s_0} \frac{\lambda(r)}{3} dr. \quad (51)$$

Die Funktion  $\lambda(r)$  kann mit der in Abb. 1 angegebenen Energieabhängigkeit von  $\lambda$  und  $r$  als bekannt angesehen werden. Für Indium ( $Z=49$ ) beispielsweise ist  $\lambda(r)$  in Abb. 2 aufgetragen. Im Energiebereich von 0,1 bis 0,5 MeV ist die Transportweglänge  $\lambda$  nahezu proportional zu  $r$ ; unterhalb von 0,07 MeV ist jedoch der genaue Verlauf von  $\lambda(r)$  nicht bekannt, da dort (im Bereich der Bindungsenergie der K-Elektronen) die Bremsformel Gl. (3) nicht mehr gültig ist.

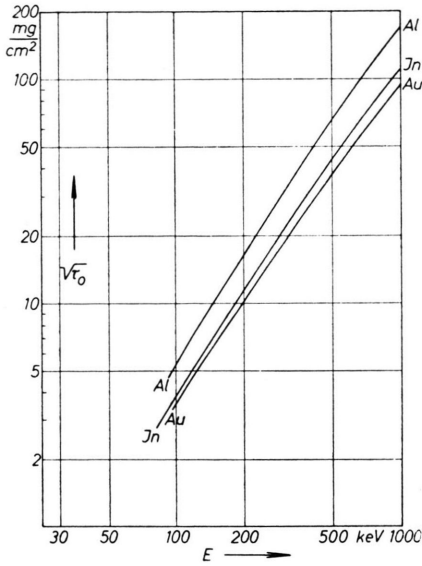
Abb. 2. Transportweglänge  $\lambda$  in Abhängigkeit von der Restreichweite  $r = s_0 - s$  für Indium ( $Z=49$ ).

Bei der Auswertung des Integrals Gl. (51) wurde der lineare Verlauf von  $\lambda(r)$  in den Energiebereich  $E < 0,07$  MeV hinein fortgesetzt. Die hierdurch bedingte Unsicherheit hat wegen der quadratischen Zunahme des Integrals mit  $r$  nur für kleine Energien einen merklichen Einfluß auf  $\tau_0$ .

Substanz $Z =$	Al 13	In 49	Au 79
0,1 MeV	5,27	3,81	3,51
0,15	10,22	7,18	6,61
0,2	16,4	11,4	10,2
0,3	30,9	21,0	18,3
0,4	47,7	31,8	27,6
0,7	105,5	69,6	60,0
1,0	170	111	94,6
1,6		202	171
2,0		268	226

Tab. 2.  $\sqrt{\tau_0}$  (in mg/cm<sup>2</sup>).

In Tab. 2 und Abb. 3 ist die nach Gl. (51) durch Planimetrieren bestimmte Größe  $\sqrt{\tau_0}$  in Abhängigkeit von der Energie angegeben.


 Abb. 3.  $\sqrt{\tau_0}$  berechnet nach Gl. (51) für Al, In und Au.

### 6. Festlegung des Parameters $s'$

Es ist nun noch die für den Übergang in die vollständige Diffusion charakteristische Grenzweglänge  $s'$  festzulegen. Dies soll in der Weise geschehen, daß der in Gl. (13) direkt aus der Transportgleichung abgeleitete mittlere quadratische Abstand der Elektronenverteilung im unendlich ausgedehnten Medium durch unsere Näherung möglichst gut approximiert wird. Hierbei kann man für die Abhängigkeit der Transportweglänge  $\lambda$  von der Restreichweite  $r = s_0 - s$  nach den Ergebnissen des vorigen Abschnittes näherungsweise eine lineare Beziehung annehmen:

$$\lambda = b r = b(s_0 - s). \quad (52)$$

Numerisch erhält man für den Faktor  $b$  im Energiebereich  $E < 0,5$  MeV für:

	Al	In	Au
$b =$	0,518	0,125	0,070

Mit diesem Ansatz Gl. (52) findet man nach der Transporttheorie Gl. (13) als mittleren quadratischen Abstand

$$\begin{aligned} \bar{z}^2 &= \frac{2}{3} \frac{b}{1-b} \left\{ s \left( s_0 - \frac{s}{2} \right) - \frac{b}{1+b} \left( s_0^2 - (s_0 - s)^{\frac{1+b}{b}} \right) \right\} \\ &= \begin{cases} \frac{s^2}{3} & (s \ll b s_0) , \\ \frac{s_0^2}{3} \frac{b}{1+b} & (s = s_0) . \end{cases} \quad (53) \end{aligned}$$

Für  $b = |d\lambda/ds| \ll 1$  und große  $s$  geht dieser in den nach der elementaren Theorie aus Gl. (24) berechneten Wert

$$\begin{aligned} \bar{z}^2 &= 2 \tau(0, s) = \frac{2}{3} b s \left( s_0 - \frac{s}{2} \right) \\ &= \begin{cases} \frac{2}{3} b s s_0 & (s \ll s_0) , \\ \frac{s_0^2}{3} b & (s = s_0) \end{cases} \end{aligned} \quad (54)$$

über, was nach den in Abschnitt 3 untersuchten Bedingungen Gl. (25) zu erwarten ist. Mit den oben angegebenen Werten für  $b = |d\lambda/ds|$  sieht man, daß die elementare Theorie für Al ( $Z=13$ ) nur eine schlechte Näherung darstellt, die erst für größere Kernladungszahlen zu brauchbaren Ergebnissen führt.

Der mittlere quadratische Abstand  $\bar{z}^2$  nach Gln. (53) und (54) ist in Abb. 4 für Indium ( $b = 0,125$ ) in Abhängigkeit von  $s$  aufgetragen ( $s_0 = 145$  mg pro  $\text{cm}^2$ , entsprechend  $E_0 = 300$  keV). Für  $s \ll \lambda(s)$ , im Bereich der Vielfachstreuung über kleine Winkel, ergibt sich nach Gl. (53) eine quadratische Zunahme von  $\bar{z}^2$  mit  $s^2/3$ , entsprechend einer annähernd geradlinigen Elektronenausbreitung nach allen Seiten. Erst im Gebiet  $s \approx \lambda(s)$ , wo bereits merkliche Rückstreu-

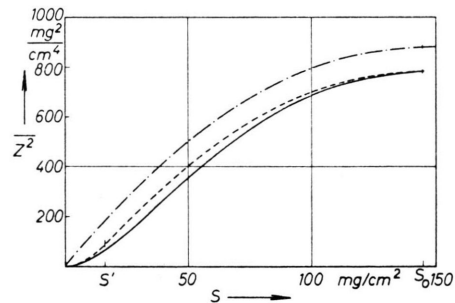


Abb. 4. Mittlerer quadratischer Abstand  $\bar{z}^2$  im unendlich ausgedehnten Medium (Indium; Anfangsenergie  $E_0 = 300$  keV).  
 — nach der Transporttheorie Gl. (53),  
 - - nach der elementaren Theorie Gl. (54),  
 - · - nach der Näherung Gl. (55).

ung eingetreten ist, geht die Kurve in einen zunächst nahezu linearen Anstieg über und verläuft dann etwa parallel zu der Näherungskurve Gl. (54). Der Übergang des quadratischen Anstiegs in den linearen Teil entspricht dem Übergang von der Vielfachstreuung in die vollständige Diffusion.

Bei der Behandlung unseres Problems in Abschnitt 4 hatten wir einen plötzlichen Übergang der geradlinigen Ausbreitung in die Diffusion bei  $s = s'$

angenommen. Im Rahmen dieser Näherung erhalten wir als mittleren quadratischen Abstand

$$\bar{z}^2 = \begin{cases} \frac{s^2}{3} & (0 < s < s'), \\ \frac{s^2}{3} + 2\tau(s', s) & (s' < s < s_0). \end{cases} \quad (55)$$

Die für den Übergang charakteristische Länge  $s'$  wird nun so festgelegt, daß die Näherungsfunktion Gl. (55) für  $\bar{z}^2$  dem exakten Verlauf Gl. (53) möglichst nahe kommt, d. h. für  $s = s'$  ohne Knick verläuft. Man erhält so

$$s' = s_0 \cdot b / (1 + b). \quad (56)$$

Bei dieser Wahl von  $s'$  geht  $\bar{z}^2$  nach Gl. (55) für  $s \rightarrow s_0$  asymptotisch in den exakten Verlauf Gl. (55) über (s. Abb. 4).

## 7. Vergleich mit den Messungen

Es sollen nun die Ergebnisse unserer Rechnung auf die in einer früheren Arbeit<sup>2</sup> mit dem  $4\pi$ -Zählrohr gemessene Absorption der  $\text{In}^{115*}$ -Konversions-elektronen angewandt werden. Abgesehen von dem geringen Energieunterschied der K- und L-Elektronen können wir hierbei mit der festen Anfangsenergie  $E_0 = 312$  keV rechnen (vgl. Anm. 2). Für die Substanzen Al, In und Au wurde aus Abb. 1 die dieser Energie entsprechende wahre Reichweite  $s_0$  entnommen und in Tab. 3 angegeben. Außerdem sind dort die in Gl. (56) definierte Größe  $s'$  sowie  $\lambda(s')$ ,  $E' = E(s')$  und  $\tau_0 = \tau(s', s_0)$  nach Abb. 3 aufgeführt.

Substanz	Al	In	Au	
$s_0$	112	154	178	mg/cm <sup>2</sup>
$b$	0,518	0,125	0,070	
$s'$	38,2	17,1	11,6	mg/cm <sup>2</sup>
$\lambda(s')$	37,4	17,1	11,6	mg/cm <sup>2</sup>
$E'$	236	288	297	keV
$\sqrt{\tau(s', s_0)}$	21,3	19,8	18,0	mg/cm <sup>2</sup>

Tab. 3. (Anfangsenergie  $E_0 = 312$  keV.)

Mit diesen Werten wurden die Absorptionskurven  $a_e(d)$  für beiderseitig aufgelegte Absorber (Schichtdicke  $d$ ) aus Al, In und Au sowie die Selbstabsorption  $s_e(2d)$  für Indiumfolien der Dicke  $2d$  nach Gln. (45) bzw. (49) berechnet. Dabei wurde zunächst in erster Näherung die Randkorrektur vernachlässigt, d. h.  $f_0(z, s) = 0$  für  $z = \pm d$  angenommen (im untersuchten Bereich  $d < 100$  mg/cm<sup>2</sup> konnten hierbei die Reihenentwicklungen Gln. (45 a) und (49 a) spätestens nach dem vierten Glied abgebrochen werden).

Um in zweiter Näherung die genauere Randbedingung Gl. (35) zu berücksichtigen, wurde mit Hilfe der ersten Näherung für  $f_0(z, s)$  nach Gl. (39) die Größe  $(-\partial f / \partial z)_{z=d}$  berechnet und die mittlere Transportweglänge der austretenden Elektronen [s. Gl. (34)] bestimmt:

$$\bar{\lambda} = \int_{s'}^{s_0} \left( -\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{z=d} \lambda^2(s) ds \bigg/ \int_{s'}^{s_0} \left( -\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{z=d} \lambda(s) ds.$$

Legt man hierbei die näherungsweise lineare Abhängigkeit Gl. (52)  $\lambda(s) = b(s_0 - s)$  zugrunde, so erhält man nach elementaren Umformungen

$$\frac{\bar{\lambda}}{\lambda(s')} = \frac{\frac{1}{2d} \int_{-d}^{+d} f_0(z, s') dz - \frac{4}{\pi^2} \frac{d}{\sqrt{\tau_0}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^2} A_m G\left(\frac{(2m+1)\pi}{2} \frac{\sqrt{\tau_0}}{d}\right)}{\frac{1}{2d} \int_{-d}^{+d} f_0(z, s') dz - \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} A_m \exp\left(-\frac{(2m+1)^2 \pi^2}{4d^2} \tau_0\right)}, \quad (57)$$

wobei

$$G(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt. \quad (58)$$

Das Integral  $G(x)$  ist im Bereich  $0 < x < 3$  bei JAHNKE-EMDE<sup>12</sup> tabuliert. Für  $x > 3$  mußte dagegen

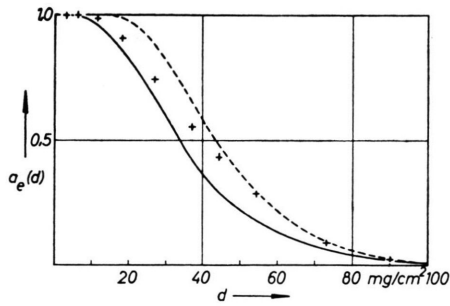
<sup>12</sup> JAHNKE-EMDE, Tafeln höherer Funktionen, Verlag Teubner, Leipzig 1948, S. 26.

auf die asymptotische Entwicklung

$$G(x) \approx \frac{1}{2x} \left( 1 + \frac{1}{2x^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2x^2)^2} + \dots \right) \quad (58a)$$

zurückgegriffen werden.

Mit der in dieser Weise bestimmten mittleren Extrapolationslänge  $0,71 \bar{\lambda}$  konnten dann die Absorptionskurven  $a_e(d)$  und  $s_e(2d)$  in zweiter Nä-


 Abb. 5. Elektronenabsorption in aufgelegten Al-Absorbern (Anfangsenergie  $E_0=312$  keV).

— — berechnet ohne Randkorrektur, Gl. (45 a),  
 — berechnet mit Randkorrektur, Gl. (45),  
 + Meßpunkte  $^2$  für  $\text{In}^{115}$ .

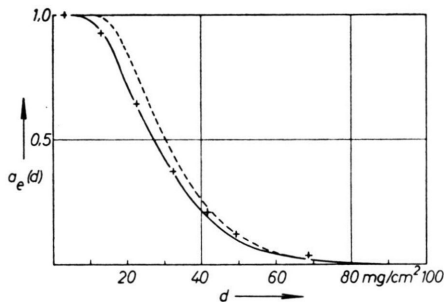


Abb. 6. Wie Abb. 5, für In-Absorber.

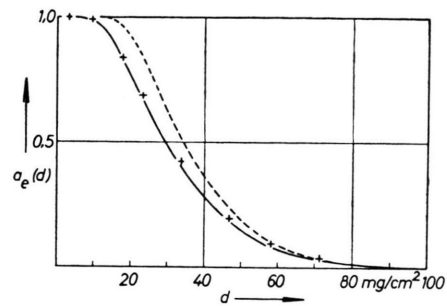
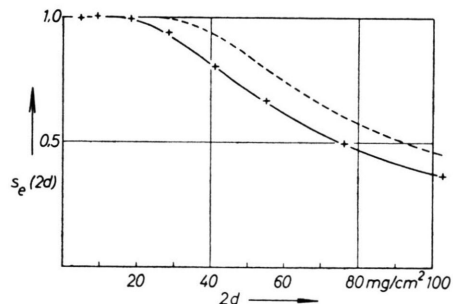


Abb. 7. Wie Abb. 5, für Au-Absorber.


 Abb. 8. Selbstabsorption monoenergetischer Elektronen in Indiumfolien (Anfangsenergie  $E_0=312$  keV).

— — berechnet ohne Randkorrektur, Gl. (49 a),  
 — berechnet mit Randkorrektur, Gl. (49),  
 + Meßpunkte  $^2$  für  $\text{In}^{115}$ .

$d$ mg/cm <sup>2</sup>	$d/\sqrt{\tau_0}$	ohne Randkorrektur			mit Rk. $a_e(d)$	ohne Randkorrektur			mit Rk. $s_e(2d)$
		$a_e(d)$	$\bar{\lambda}/\lambda$ (s')	$0,71 \bar{\lambda}$ mg/cm <sup>2</sup>		$s_e(2d)$	$\bar{\lambda}/\lambda$ (s')	$0,71 \bar{\lambda}$ mg/cm <sup>2</sup>	
0,00	0,0	1,000	1,000	12,10	1,000	1,000	1,000	12,10	1,000
3,96	0,2	1,000	0,993	12,02	1,000	1,000	0,993	12,02	1,000
7,92	0,4	1,000	0,972	11,76	0,996	1,000	0,972	11,76	0,996
11,88	0,6	1,000	0,934	11,30	0,962	1,000	0,932	11,28	0,965
15,84	0,8	0,984	0,886	10,71	0,876	0,986	0,877	10,61	0,899
19,80	1,0	0,922	0,824	9,97	0,763	0,941	0,831	10,06	0,816
23,76	1,2	0,816	0,766	9,27	0,650	0,868	0,788	9,53	0,733
27,72	1,4	0,692	0,720	8,71	0,540	0,787	0,780	9,44	0,652
31,68	1,6	0,571	0,680	8,23	0,442	0,709	0,770	9,32	0,582
35,64	1,8	0,460	0,645	7,80	0,355	0,639	0,763	9,23	0,522
39,60	2,0	0,365	0,614	7,43	0,281	0,579	0,761	9,21	0,472
47,52	2,4	0,219	0,562	6,80	0,169	0,484	0,760	9,20	0,394
55,44	2,8	0,124	0,516	6,24	0,098	0,416	0,759	9,18	0,338
63,36	3,2	0,065	0,478	5,78	0,053	0,363	0,758	9,17	0,297
71,82	3,6	0,032	0,455	5,50	0,028	0,323	0,757	9,16	0,264
79,20	4,0	0,016	0,444	5,37	0,015	0,291	0,757	9,16	0,238
89,10	4,5	0,006			0,006	0,258	0,756	9,15	0,212
99,00	5,0	0,002			0,002	0,233	0,756	9,15	0,189

 Tab. 4. Berechnung der Elektronenabsorption in Indiumfolien (Anfangsenergie  $E_0=312$  keV).

herung nach Gl. (45) bzw. (49) berechnet werden. Zur Erläuterung wurde der Gang der Rechnung für Indium in Tab. 4 zusammengefaßt. Dort ist auch die mit wachsender Foliendicke  $d$  abnehmende Größe  $0,71 \bar{\lambda}$  angegeben.

Der Verlauf der Näherungsfunktionen ist in den Abb. 5 bis 8 aufgetragen. Hiernach hat die Berücksichtigung der Randbedingung Gl. (35) eine erhebliche Änderung des Kurvenverlaufes gegenüber der ersten Näherung zur Folge, weil die mittlere Extrapolationslänge  $0,71 \bar{\lambda}$  nicht klein gegen die Foliendicke ist. Ein weiterer Näherungsschritt, bei dem  $\bar{\lambda}$  aus der zweiten Näherung für  $f_0(z, s)$  zu berechnen wäre, würde demgegenüber keine wesentliche Änderung mit sich bringen, da  $\bar{\lambda}$  nur wenig von der Randbedingung abhängt.

Zum Vergleich sind in Abb. 5 bis 8 die gemessenen Absorptionskurven eingezeichnet. Für Alumi-

nium verläuft die Meßkurve im Gebiet zwischen den beiden Näherungsfunktionen. Eine genauere Übereinstimmung ist hier auch nicht zu erwarten, da die elementare Theorie für Al wegen  $b=0,5$  versagt. Aber bereits für Indium ( $b=0,12$ ) und erst recht für Gold ( $b=0,07$ ) werden die Meßpunkte von der zweiten Näherung bis auf wenige Prozent wieder gegeben. Eine derart gute Übereinstimmung über den ganzen Kurvenverlauf war wegen der Vernachlässigung in der Theorie von vornherein kaum zu erwarten; z. B. wegen des abrupten Überganges der geradlinigen Elektronenausbreitung in die Diffusion bei unserer Näherung wären Abweichungen für kleine Schichtdicken denkbar. Die geringfügigen Abweichungen beim Auslaufen der Absorptionskurven ( $d > 50 \text{ mg/cm}^2$ ) können durch die vernachlässigte Inhomogenität der Elektronenanfangsenergie und die dort nicht mehr streng erfüllte Bedingung  $z \ll \tau/\lambda$  Gl. (25) erklärt werden.

## Die Aktivierungsquerschnitte von $\text{Mn}^{55}$ , $\text{Cu}^{63}$ , $\text{Pd}^{108}$ und $\text{In}^{115}$ für thermische Neutronen\*

Von H. MEISTER\*\*

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen  
(Z. Naturforsch. 13 a, 820–822 [1958]; eingegangen am 13. Mai 1958)

Es wurden kreisscheibenförmige Folien der untersuchten Substanzen in einer Standardgeometrie mit thermischen Neutronen aktiviert und durch Vergleich der mit dem  $4\pi$ -Zählrohr gemessenen Sättigungsaktivitäten deren Aktivierungsquerschnitte bestimmt. Die auf  $\text{Au}^{197}$  mit  $\sigma_{\text{act}} = 98,7$  barn bezogenen Ergebnisse werden mit den von HUGHES u. a.<sup>1</sup> angegebenen Werten verglichen.

Aus Mn, Cu, Pd, In und Au wurden metallische Folien von 12 mm Durchmesser und einigen  $\text{mg/cm}^2$  Schichtdicke hergestellt und einzeln im thermischen Neutronenfeld einer Standardanordnung ( $40 \times 45 \times 60 \text{ cm}^3$  Paraffin) aktiviert, wie dies in einer vorangehenden Arbeit<sup>2</sup> genauer beschrieben wurde. Als Neutronenquelle diente hierbei eine 500 mC Ra + Be-Quelle. Anschließend wurde die  $\beta$ -Aktivität der Folien mit dem  $4\pi$ -Zählrohr gemessen. Bei einem thermischen Neutronenfluß  $v_0 n$  erhält man dann als spezifische Zählrate (pro g der aktivierten Substanz) in der Sättigung

$$\nu = v_0 n \mu_{\text{act}} g s_{\beta} w, \quad (1)$$

wobei 
$$\mu_{\text{act}} = p_i \frac{\sigma_{\text{act}} N_L}{A}, \quad (2)$$

$\sigma_{\text{act}}$  = Aktivierungsquerschnitt,  $p_i$  = relative Häufigkeit des aktivierten Isotops,  $A$  = Atomgewicht,  $N_L$  = LOSCHMIDT-Zahl. Der Faktor  $g$  berücksichtigt die Schwächung des Neutronenfeldes im Innern der Folie,  $s_{\beta}$  die Selbstabsorption der  $\beta$ -Strahlung;  $w$  ist die Ansprechwahrscheinlichkeit des Zählrohres. Bei Kenntnis dieser Korrekturfaktoren kann man durch Vergleich der gemessenen spezifischen Zählraten  $\nu$  bei zunächst unbekanntem Neutronenfluß  $v_0 n$  die Größe  $\mu_{\text{act}}$  und nach Gl. (2) den Aktivierungsquerschnitt  $\sigma_{\text{act}}$  relativ zu einer Bezugssubstanz bestimmen.

Bei unseren Messungen wurde Gold als Bezugssubstanz verwendet, dessen Absorptionsquerschnitt bei  $v_0 = 2200 \text{ m/sec}$  mit großer Genauigkeit bekannt

\* Aus der Göttinger Dissertation 1957.

\*\* Jetzt: Reaktorstation Karlsruhe, Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik.

<sup>1</sup> D. J. HUGHES u. J. A. HARVEY, Neutron Cross Sections, Brookhaven National Laboratory, 1955.

<sup>2</sup> H. MEISTER, Z. Naturforsch. 13 a, 722 [1958].